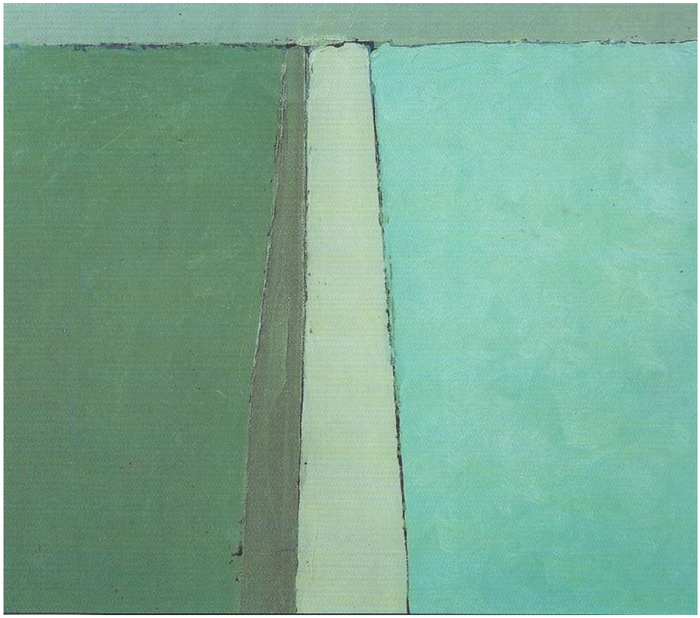
W. Congdon. Campo Orzo, 1982. Milano, coll. FIUA.

CENTRO CULTURALE S. CARLO (*).

Lo sviluppo del pensiero matematico.

(CFM. Conferenza da tenersi lunedì 10 dicembre 1990, nell'ambito dei "Lunedì scientifici" per il ciclo su "Itinerari della scienza"). *Dattiloscritto reimpaginato giugno 2013*.

1 - È appena necessario osservare che la Matematica si è presentata, nel corso della evoluzione storica del pensiero umano, con diversi aspetti; ed ancora oggi essa ci si presenta con molti atteggiamenti, che mal si prestano ad essere presentati, descritti e giudicati in un breve excursus come quello che ci accingiamo a fare. Pertanto, di fronte alla scelta tra una visione fugace e superficiale che miri ad una completezza fittizia, senza poterla ovviamente raggiungere, e l'analisi di un aspetto che ci sembra importante per le sue implicazioni e i suoi collegamenti, abbiamo scelto questa seconda strada. Naturalmente questa nostra scelta presenterà pure i caratteri di

incompletezza e di sommarietà che abbiamo ricordato poco sopra. Vorremmo tuttavia osservare che il fatto di aver dovuto fare una scelta, necessariamente parziale e limitativa, dà conto della complessità del panorama della matematica contemporanea: infatti oggi non ci si può illudere di comprendere la matematica sotto una definizione apparentemente esaustiva, come si illudeva di poter fare il D'Alembert, nella classica Enciclopedia di Diderot. Quivi la matematica era presentata come "scienza della quantità"; e sotto questa classificazione generica venivano poi distinte e suddivise due specie: la scienza della quantità continua, da identificarsi con la geometria, e la scienza della quantità discreta, da identificarsi con l'aritmetica.

Questa procedura logica porta con sé l'illusione di comprensione definitiva e totale dell'oggetto che si pensa di definire. Essa tuttavia non è più applicabile oggi, e ciò non soltanto per la complessità del panorama del pensiero matematico (di cui abbiamo detto poco sopra) ma anche, a nostro parere, perché ci pare di poter dire che la matematica è caratterizzata non tanto dai suoi contenuti, dai suoi oggetti, ma soprattutto dalle sue procedure e dai suoi metodi.

2 - Riteniamo che una breve analisi storica della evoluzione del pensiero matematico sia molto utile per comprendere appieno questo stesso pensiero, e per comprendere l'importanza che la matematica riveste oggi nel pensiero scientifico ed, oseremmo dire, in tutta la mentalità moderna; ed abbiamo avanzato questa osservazione ben convinti della sua validità, anche se qualcuno potrebbe giudicare questa nostra posizione come poco sostenibile, o addirittura paradossale. Nelle pagine che seguono analizzeremo quindi l'evoluzione del pensiero matematico durante la sua storia; la nostra analisi si soffermerà soprattutto su quei momenti che ci appaiono particolarmente significativi. Pertanto essa potrà essere giudicata forse superficiale e da qualcuno addirittura sommaria; ma noi riteniamo che una visione sintetica, e, per così dire, compatta e condensata, sia necessaria per poter svolgere in modo rigoroso le tesi che abbiamo enunciato.

Tuttavia, prima di iniziare la sommaria analisi storica di cui abbiamo detto, e prima di entrare nel merito della nostra trattazione, vorremmo additare quello che ci appare come un aspetto particolare della storia della matematica: ci piace infatti considerarla come la storia dello sforzo umano per conquistare, attraverso i secoli, la certezza del sapere; in particolare per conquistare un determinato tipo di certezza, che è quella del sapere simbolizzato e rigorosamente deduttivo. Pertanto, da questo punto di vista, la storia della matematica ci si presenta come la storia di una esaltante avventura umana: l'avventura che consiste nella ricerca della certezza del sapere; certezza di contenuti, quando ciò sia possibile, ma soprattutto certezza nelle deduzioni. Riprenderemo nel seguito queste osservazioni che per il momento abbiamo presentato ed enunciato come una specie di prefazione programmatica della nostra ricerca e delle nostre analisi.

3 - LA MATEMATICA GRECA. Non mancano prove storiche sull'esistenza di nozioni matematiche presso popoli che precedettero cronologicamente il fiorire della civiltà greca; i testi di divulgazione scientifica presentano spesso queste nozioni storiche, e noi ci limiteremo quindi a ricordare la testimonianza di Erodoto, il quale accenna al fatto che la proposizione, da noi abitualmente citata come teorema di Pitagora, era già nota agli antichi egiziani, che la utilizzavano per gli scopi pratici dell'agrimensura. Tuttavia noi riteniamo giusto iniziare la trattazione dalla matematica dei Greci, perché pensiamo che questa abbia delle caratteristiche le quali la distinguono profondamente da quelle che l'hanno preceduta. Infatti i documenti storici che possediamo, relativi alla matematica degli Egiziani, dei Caldei, degli Indiani, dei Cinesi provano che costoro sapevano risolvere certi problemi matematici, anche in modo spesso ingegnoso; ma le soluzioni che ci sono state tramandate riportano soltanto delle procedure pratiche, per la soluzione di problemi particolari. Ciò beninteso non toglie nulla alla ingegnosità dei solutori, ma conferma la nostra opinione che la matematica greca si distingua sostanzialmente da quelle che la precedettero per il rigore delle dimostrazioni, l'astrattezza e la generalità delle soluzioni ed in generale per l'autentica scientificità delle procedure.

Ricordiamo a questo proposito la polemica intercorsa tra Proclo, matematico alessandrino del secolo quinto dopo Cristo, e gli Epicurei; costoro asserivano che la geometria è completamente inutile, perché insegna delle cose che anche i somari conoscono. Infatti, aggiungevano, la geometria insegna che un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due; ma ciò è noto anche ai somari, perché qualunque somaro, per andare ad un mucchio di fieno, non percorre due lati di un triangolo se può percorrerne soltanto il terzo; dunque, concludevano gli Epicurei, la geometria è una scienza da somari. La risposta di Proclo fu che può essere vero che alcune nozioni possedute dal somaro coincidano con quelle possedute dell'uomo; ma l'uomo in più sa dimostrare la verità delle proposizioni, e sa garantire che le cose non possono andare diversamente. In altre parole, l'uomo ha una conoscenza che non si riduce alla pura informazione, ma si estende alla motivazione, alla dimostrazione delle proposizioni. La cosa può essere ribadita ricordando due esempi, che a noi paiono tipici, per sostenere la sostanziale differenza tra pura informazione e conoscenza razionale, di cui abbiamo detto.

Il primo esempio è fornito dalla garanzia della esistenza di coppie di segmenti incommensurabili tra loro: coppie di segmenti tali che nessun sottomultiplo dell'uno di essi entra esattamente un numero intero di volte nell'altro. Ora è chiaro che questa proposizione supera la portata di ogni e qualsiasi esperienza: è una proposizione che si potrebbe chiamare meta-empirica, e la cui validità dipende soltanto dalla dimostrazione, cioè dalla forza della logica e del ragionamento. Per tornare al discorso polemico di Proclo contro gli Epicurei, non è una proposizione che possa entrare nel patrimonio di nozioni del somaro.

Il secondo esempio è costituito dal teorema, che si trova dimostrato in Euclide, che afferma che il numero dei numeri primi è infinito; anche in questo caso si tratta di una proposizione che supera le possibilità di constatazione empirica e di esperienza concreta: si tratta cioè di una proposizione che appartiene al dominio della conoscenza razionale umana, ottenibile con la sola dimostrazione logica.

Pertanto, in questo ordine di idee, possiamo affermare che i Greci furono primi che possedettero una conoscenza scientifica, nel senso vero ed autentico della parola: una conoscenza cioè che non si limita al puro accumulo di dati, alla pura constatazione dei fatti, ed alla sterile tesaurizzazione delle informazioni, ma vuole giungere alla dimostrazione, cioè al possesso profondo mentale della realtà attraverso il possesso delle sue ragioni intime.

4 - Alla luce delle argomentazioni che stiamo sviluppando si potrebbe dire che il trattato degli "Elementi" di Euclide costituisce un autentico miracolo intellettuale: in esso infatti vengono distinte nettamente le proposizioni non dimostrate e quelle possedute per forza di logica, in seguito a dimostrazione. Vorremmo inoltre osservare che la matematica greca non si distingue soltanto per la numerosità dei risultati e per il rigore della esposizione; in essa troviamo anche la codificazione metodologica della ricerca scientifica. Infatti si incontra nel trattato di Euclide un celebre passo in cui si fa l'analisi delle procedure con cui si accerta la validità di un teorema oppure si ricerca la soluzione di un problema. Come è noto, tali procedure vengono presentate come la successione di due momenti, che vengono chiamati "analisi" e "sintesi". Ecco come Euclide presenta questi procedimenti. [Euclide. Elementi. Libro XIII. Gli storici sono propensi a giudicare le frasi riportate come interpolate. Cfr. per esempio Thomas L. Heath. The thirteen books of Euclid's Elements. New York (Dover Publications), 1956. Vol. I , C. IX, §6, pag. 138.]
"Si chiama analisi un procedimento in cui si ammette come vera una certa proposizione (che si vuole dimostrare) e si deduce da questa ipotesi una serie di conseguenze, fino a giungere a qualche

proposizione che è evidente; oppure è stata ammessa come vera. Si chiama sintesi il procedimento con il quale , partendo da certe proposizioni accettate, si giunge ad una proposizione che si vuole dimostrare".

Ed il matematico Proclo, qualche secolo dopo Euclide, commenta: “L'analisi dunque prende come punto di partenza ciò che si cerca, e da qui deduce le conseguenze fino a giungere a qualche proposizione che è ammessa come vera; perché nell'analisi noi accettiamo come dato ciò che vogliamo dimostrare e cerchiamo quali sono i fondamenti sui quali si basa, ed ancora i fondamenti dei fondamenti, e così via, fino a che riusciamo a giungere, in questo continuo cammino a ritroso, a qualche cosa che è già noto o che appartiene alla classe dei primi principi; questo metodo noi lo chiamiamo analisi, o soluzione con metodo retrogrado.

Nella sintesi invece, invertendo il procedimento, prendiamo come punto di partenza ciò a cui siamo arrivati con l'analisi, e via via, dimostrando come tesi quelle proposizioni che avevamo prese come ipotesi, e collegandole in ordine logico, giungiamo alla fine a costruire (o a dimostrare ciò che si cercava.”

Riportiamo qui le parole con le quali il matematico e filosofo Federigo Enriques commentava il pensiero dei matematici greci che abbiamo riportato; ritorneremo anche in seguito su questa pagina di Enriques, perché in essa sono accennati alcuni argomenti sui quali dovremo soffermarci ancora.

“ La scuola di Platone, e poi di Eudosso, dà un particolare significato logico e metodologico del procedimento "analitico" che si mette in opera nella soluzione dei problemi geometrici. In questa "analisi" si comincia a supporre che il problema proposto *P* sia risoluto, e si deducono successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali venga risoluto in forza del precedente, finché si arrivi ad un problema *R*, che si sappia risolvere. La "sintesi" consiste nel partire dalla soluzione di quest'ultimo problema *R*, e dedurne via via la risoluzione della nostra catena di problemi in ordine inverso, fino a dimostrare la soluzione di *P*. Questa dimostrazione è necessaria, perché coll’analisi si è dimostrato soltanto che le soluzioni di *P* sono soluzioni di *R*, ma non viceversa. Insomma l'analisi è una decomposizione ideale del concetto della figura da costruire, nelle condizioni, proprietà o note che la determinano (ed è quindi in rapporto con la teoria platonica delle idee): essa appare come un procedimento di generalizzazione dei problemi. L'opposto si può dire della sintesi la quale - da sola - fornisce certo soluzioni del problema proposto, ma non tutte.

Il significato greco dell'analisi dei problemi geometrici si è evoluto nel progresso moderno delle scienze matematiche. Su questa evoluzione sembra aver massimamente influito il fatto che il metodo di risoluzione detto "dei luoghi geometrici" è divenuto, con Cartesio, il fondamento della applicazione sistematica dell'algebra alla geometria.
Nella trattazione algebrica sì è visto soprattutto la decomposizione delle condizioni del problema in condizioni elementari, espresse da equazioni. Perciò il metodo cartesiano ha ricevuto il nome di "geometria analitica", e poi tutta l'algebra, con il calcolo differenziale ed integrale in cui si prolunga ha preso il nome di "analisi matematica". Con questo nome i moderni riconoscono, in qualche modo, nella più generale scienza dei numeri e delle equazioni, l'organo delle matematiche, che permette di analizzare e ricondurre a una forma comune più generale tutti i problemi di geometria, di meccanica ecc.".

Pertanto si può dire che le considerazioni dei Greci sono valide anche oggi: invero la sostanza del metodo rimane valida, anche se la tecnica applicata nelle procedure si avvale dei progressi dell'algebra che sono avvenuti durante i secoli. In particolare resta valida l'osservazione di Enriques secondo la quale l'analisi matematica trae il proprio nome proprio per il fatto di essere quasi per antonomasia la realizzazione della procedura di analisi codificata da Euclide e commentata da Proclo.

Ritorneremo su questi argomenti quando incontreremmo quell'episodio fondamentale della storia della matematica che ha portato all'invenzione dei metodi di quella che oggi viene chiamata "geometria analitica". In questo ordine di idee possiamo quindi giustificare il giudizio che Heath dà sulla matematica greca.

5 - Per concludere l'analisi della matematica greca vorremmo ricordare che in essa troviamo forse il primo esempio del fatto che la matematica viene utilizzata come chiave di lettura della realtà fisica. Ritorneremo su questo argomento quando incontreremo la problematica aperta da Galileo in questo ordine di idee. Qui vorremmo limitarci ad osservare che la geometria per Greci costituisce anche, secondo l'espressione calzante di F. Enriques, il primo capitolo della fisica; cioè il primo momento in cui l'uomo utilizza gli schemi ed i metodi della geometria per conoscere, per così dire, dall'interno la realtà, o, se vogliamo, per dare una organizzazione ed una interpretazione razionale dei fenomeni e dei rapporti dell'uomo con gli oggetti che lo circondano.

Invero, alla luce delle idee di F. Klein, e degli sviluppi metodologici che hanno fatto seguito alla sua opera, la geometria greca si può vedere come la teoria delle proprietà dei corpi rigidi, ed anche come la ricerca degli invarianti delle figure geometriche per il gruppo dei movimenti rigidi. Infatti il punto fondamentale della geometria euclidea consiste nella teoria dell'uguaglianza; ed a sua volta questa è fondata sulle proposizioni riguardanti la relazione di uguaglianza dei triangoli; relazione che infine è fondata su una intuizione ed una accettazione acritica del movimento rigido delle figure. [RIPORTARE LE DISCUSSIONI CHE SI TROVANO IN HEATH.] Troviamo quindi nella matematica greca, in forma per così dire cristallizzata, quelle procedure di concettualizzazione, di idealizzazione fantastica e di deduzione rigorosa che sono fondamentali per la conoscenza scientifica in ogni tempo ed in ogni occasione.

Per la completezza, non si può tacere il fatto che il pensiero greco abbia pensato all'analisi quantitativa dei fenomeni meccanici: il moto dei corpi e le sue cause, ma la teorizzazione che ne viene fatta, per esempio in Aristotele, risente troppo della metodologia filosofica; inoltre la mancanza degli strumenti matematici atti a dominare i concetti che non sono strettamente geometrici ha in certo modo bloccato una analisi della realtà che andasse al di là della pura circostanza geometrica.

Occorre tuttavia osservare che la mentalità greca affrontò anche una problematica filosofica strettamente collegata con quella geometrica: ci riferiamo alla problematica riguardante il continuo. In questa problematica, da una parte la matematica greca accettò, anche se non esplicitamente formulandolo, il principio del disegno come garanzia della esistenza degli enti che si considerano. Ciò può essere considerato da una parte come il risultato della capacità creativa e della fantasia geometrica dei Greci, e dall'altra come un risultato della loro mentalità critica, che non accettava di prendere in considerazione degli enti o delle figure, senza che ne fosse data la effettiva costruzione. Soltanto con il secolo XIX, per esempio, si giunse ad enunciare il concetto di continuità geometrica mediante postulati di pura esistenza, che prescindono dalla costruibilità o dalla effettiva costruzione degli enti che vengono nominati.

Tuttavia alla matematica greca non era estranea anche la problematica riguardante l'infinito ed i procedimenti che coinvolgono la ripetizione indefinita di operazioni o di atti di pensiero. Il celebre paradosso di Achille, per esempio, ed altri paradossi del continuo hanno posto in maniera chiara dei problemi che soltanto il secolo XIX, dopo secoli di analisi logica e critica, poté affrontare in modo efficace. Ma gli strumenti concettuali non differiscono da quelli che i Greci possedevano e che hanno impiegato in modo tanto ammirevole.

A questo proposito ricordiamo qui le sottigliezze delle dimostrazioni per esaustione, che riescono a dominare logicamente le procedure richiedenti in linea di principio dei procedimenti infiniti. E non possiamo passare sotto silenzio le procedure euristiche, delle quali Archimede ci ha lasciato esempi luminosi; procedure che, come è noto, preludono a quelle che si incontreranno dopo secoli e secoli con la invenzione del calcolo infinitesimale.

Troviamo pertanto giusto affermare che la geometria greca fu, sotto certi aspetti, un primo capitolo della conoscenza razionale scientifica del mondo e tale rimase per secoli. E non possiamo dimenticare che questa conoscenza procede esattamente come procede la nostra: enunciando le proprietà della realtà che vengono considerate come immediate, e quindi giustificate dalla loro evidenza, e dimostrando rigorosamente le altre che ne sono conseguenze. Possiamo aggiungere che in Euclide troviamo una finezza critica che è quasi unica nel suo genere: precisamente troviamo la distinzione tra nozioni comuni e postulati. In altre parole questi ultimi sono bensì presentati senza dimostrazione, ma non si impone al lettore o all'ascoltatore di accettarli: semplicemente si richiede di accettarli, quasi a dire con questa denominazione che queste proposizioni sono del tutto strumentali, non sono considerate come delle verità necessarie di natura. Si aprirebbe così l'adito a costruzioni razionali che non partono da questi postulati, ma che potrebbero vere la stessa validità conoscitiva e lo stesso rigore della teoria che si sta costruendo.

6 - LA CRISI DEL RINASCIMENTO. In questa esposizione sommaria non possiamo soffermarci ad analizzare e ad apprezzare la matematica medievale: essa avrebbe qualche interesse, ma non potrebbe trovare posto in questa nostra trattazione per ristrettezza di spazio. Ci limitiamo quindi a ricordare che questa matematica risente in modo fondamentale della influenza della matematica greca, ed in particolare di Euclide, quando i suoi testi poterono raggiungere l'occidente europeo, passando attraverso le elaborazioni e le trascrizioni arabe. Come abbiamo già detto, noi dobbiamo limitarci qui a metter in evidenza certi momenti che ci appaiono profondamente importanti, e certe idee altamente creatrici, che segnarono in modo indelebile lo sviluppo del pensiero matematico del Rinascimento. Esprimendoci in forma molto sommaria, noi crediamo che queste idee veramente creatrici e questi momenti fondamentali si possano identificare nella creazione dell'algebra, nella

invenzione della geometria analitica, nella creazione del calcolo infinitesimale e nella costruzione della meccanica razionale cioè nello studio, in forma veramente scientifica, del moto dei corpi e delle sue cause. Nelle pagine che seguono ci occuperemo di questi argomenti nell'ordine in cui li abbiamo richiamati; tuttavia è appena necessario ricordare che tale ordine si riferisce soltanto ad una certa comodità di classificazione e di esposizione; quindi l'ordine suddetto non riflette la successione diacronica dei fenomeni culturali di cui parliamo; eventi che si sono intrecciati e si sono stimolati vicendevolmente.

7 - Dopo le precisazioni con cui si chiude il paragrafo precedente, occupiamoci dunque in primo luogo della nascita dell'algebra. Ripetiamo ancora una volta che non ci occuperemo qui della precisazione minuta delle circostanze storiche, ma del significato che questo evento ha avuto ed ha tuttora per 1'evoluzione del pensiero matematico; ciò non esclude tuttavia che l'opera di ricerca storica precisa non sia importante, anzi addirittura necessaria; ma essa non entra nell'orizzonte di questo nostro lavoro.

Capita spesso di leggere che i Greci possedevano la soluzione delle equazioni di secondo grado; sarebbe forse più preciso il dire che i Greci sapevano risolvere, in forma geometrica, dei problemi che noi, in forma algebrica, riconduciamo alla soluzione di una o più equazioni di secondo grado. Ma ciò che qui ci interessa in questa fase della nostra trattazione è il metodo con il quale i problemi sono risolti; e questo metodo acquista una fisionomia del tutto nuova quando la matematica occidentale conquista gli strumenti che le sono forniti dall'algebra.

Si suole far risalire la nascita dell'algebra in occidente, sotto la forma in cui noi intendiamo questa scienza, al secolo XVI; invero non si può dimenticare la fioritura di studi, in cui si distinsero in modo particolare Niccolò Tartaglia, Gerolamo Cardano, Scipione del Ferro, Ludovico Ferraris, Rafael Bombelli; matematici che in tale epoca hanno segnato l'inizio dell'algebra moderna, con la risoluzione delle equazioni di terzo e di quarto grado. Tuttavia ci pare di poter dire che i germi di queste conquiste scientifiche veramente rivoluzionarie furono posti in occidente quando vi si diffusero le convenzioni di rappresentazione dei numeri, che ancora oggi noi utilizziamo, come tutti i paesi civili, e che ebbero la loro origine probabilmente presso la civiltà indiana, e pervennero a noi attraverso gli Arabi.

È noto che l’introduzione di questi nuovi metodi per la rappresentazione dei numeri è dovuta all'opera di Leonardo Pisano detto il Fibonacci, il quale, nelle sue opere, ha anche messo in evidenza i grandissimi vantaggi di queste convenzioni: anzitutto la possibilità di rappresentare con mezzi semplici, chiari ed uniformi dei numeri comunque grandi; ma soprattutto la facilità di eseguire le operazioni aritmetiche.

Analoghe considerazioni potrebbero essere svolte quando, a suo tempo, parleremo delle folgoranti intuizioni di G.W. Leibnitz, che aveva gettato le prime basi della logica simbolica, in modo da ricondurre ogni deduzione ad un calcolo, ad una applicazione rigorosa delle leggi sintattiche dei simbolismo scelto. È noto che Leibnitz espresse queste sue intuizioni con il celebre passo che termina con la parola "calculemus": non perdiamoci in parole, ma eseguiamo i calcoli. Con queste parole veniva messa in evidenza la profonda analogia che esiste tra la deduzione logica formale ed il calcolo; questa stessa idea è stata espressa da G. Peano, il quale ha affermato che "la matematica è una logica perfezionata".

Riprendendo il discorso di prima, potremmo dire che le nuove possibilità di rappresentazione dei numeri si sono affermate come un progresso fondamentale rispetto alle tecniche tipicamente geometriche utilizzate dai Greci; in particolare le nuove possibilità di calcolo, che avviene mediante l'applicazione delle sole leggi formali della sintassi dei simboli adottati, hanno permesso di trattare l'incognita e le sue potenze senza precisare la sua natura ed il suo significato; sappiamo che N. Tartaglia dà all'incognita il nome di "cosa", esprimendo così la sua indeterminatezza. Sappiamo che il movimento di pensiero aperto dai matematici italiani che abbiamo nominato si è sviluppato, in particolare, con l'invenzione del simbolismo algebrico. Ma vorremmo anche osservare che il simbolismo non è tutto: infatti la soluzione che Tartaglia dà della equazione di terzo grado è da lui presentata con parole: ma con Cardano si presenta la necessità di costruire un insieme di enti che possano dare significato e validità alle operazioni da eseguire per giungere alla soluzione, si avviava così la costruzione del campo complesso, con l'invenzione di quei nuovi enti che R. Bombelli presenterà in forma rigorosa, senza dare delle definizioni astratte, ma presentandoli attraverso le regole di calcolo, con una procedura che prelude alle impostazioni rigorose accettate anche oggi.

8 - La maturazione dei metodi dell'algebra, e poi del suo simbolismo, ha permesso alla matematica del secolo XVI di risolvere certi problemi che erano stati inutilmente posti dalla matematica greca.

Ma questa maturazione ha permesso anche di porre la geometria sotto una luce nuova; questo cambiamento, che giustamente si potrebbe qualifica e come rivoluzionario, è avvenuto con l'invenzione dei metodi di quella che oggi abitualmente si chiama "geometria analitica". È noto che questi metodi sono nati in Francia, nel secolo XVII; lasciamo impregiudicata la questione storica se la priorità della loro invenzione sia dovuta a Pierre de Fermat oppure a René Descartes (chiamato latinamente Cartesio); questione di notevole interesse storico, ma la cui soluzione non entra nel quadro del nostro discorso attuale. A noi interessa invece mettere in evidenza il fatto che questo nuovo capitolo della geometria ha assunto, fin dalla sua origine, l'aspetto di un metodo: è interessante per esempio ricordare che l'origine della geometria analitica viene fatta risalire da alcuni all'ultima parte (quasi un'appendice) della celebre opera di Cartesio intitolata "Discorso sul metodo". Pertanto, nella visione cartesiana, gli oggetti della geometria erano da considerarsi soltanto come alcuni degli oggetti della conoscenza umana, conoscenza della quale egli intendeva, con la sua opera, dettare le procedure ed i metodi generali.

Il modo in cui oggi viene presentato l'insieme delle convenzioni della geometria analitica lascia un poco in ombra un aspetto che invece per Cartesio era il punto di partenza fondamentale; con linguaggio moderno, queste idee potrebbero essere presentate nel modo seguente: interpretando ogni numero come la misura di un segmento rettilineo, mediante la scelta di una conveniente unità di misura, ne consegue che le relazioni tra numeri vengono interpretate in ogni caso come relazioni tra i segmenti. Questo modo di vedere cambiava nettamente l'impostazione classica, secondo la quale il prodotto di due numeri veniva interpretato in ogni caso come rappresentante un'area, il prodotto di tre numeri veniva interpretato come rappresentante un volume. Ora è chiaro che questa visione, pur avendo una sua validità, era limitata dai confini contro i quali cozza la nostra immaginazione; invece, scegliendo la strada di Cartesio, ogni monomio algebrico, quale che sia il suo grado, può essere considerato come l'immagine di un segmento. Il passo successivo della invenzione cartesiana è quello che porta al concetto di coordinate dei punti del piano e dello spazio, e quindi alle convenzioni di rappresentazione che oggi tutti noi conosciamo ed utilizziamo. Si ottiene così un insieme di convenzioni che permette di associare ad ogni elemento geometrico (punto, linea, superficie, volume ecc.) un ente dell'algebra (numero, insieme di numeri, equazioni, relazioni algebriche ecc.). Si ottiene quindi un insieme di convenzioni di rappresentazione che supera quello classico; il quale era pure molto valido, come ha dimostrato tutta la geometria greca, che faceva riferimento a figure ed immagini.

Ma le convenzioni della geometria analitica non conducono soltanto ad un nuovo metodo per rappresentare gli enti della geometria; esse infatti permettono di ricondurre la soluzione dei problemi geometrici a quella dei problemi algebrici che li traducono; infatti i calcoli, eseguiti sulle coordinate, permettono di trarre le conseguenze dalle rappresentazioni; in questa luce quindi l'operazione classica, che era chiamata "analisi", e che, come abbiamo già detto, si riduceva alla deduzione delle conseguenze ed alla ricerca delle proprietà necessarie delle figure, immaginate come soluzioni dei problemi, diventa per così dire quasi automatizzata dalla applicazione delle leggi dell'algebra, le quali realizzano la deduzione mediante l'applicazione della sintassi dell'algebra stessa. Si comprende così come questo insieme di metodi sia chiamato "geometria analitica": questi metodi infatti permettono di mettere in opera, in forma sicura e quasi meccanica, l'operazione di analisi che era stata codificata dalla logica classica.

9 - Abbiamo cercato di mettere in evidenza il significato e la portata dei metodi della geometria analitica; a ciò che abbiamo detto vorremmo aggiungere alcune osservazioni, che apriranno la strada alle considerazioni che seguiranno. Anzitutto vorremmo osservare che la utilizzazione dell'algebra come strumento deduttivo, e quindi in sostanza come mezzo per risolvere problemi della geometria, è stata resa possibile dal progresso dell'algebra; progresso di cui abbiamo già detto e che in questa circostanza incomincia a mostrare la propria importanza ed il suo significato. Ma si può anche aggiungere che la possibilità di ricondurre la deduzione ad un calcolo, e quindi di utilizzare gli strumenti algebrici per la deduzione, è stata resa possibile dalla invenzione dei nuovi strumenti per rappresentare le operazioni sui numeri; il che ha condotto progressivamente a spostare l'attenzione dei matematici sulle leggi sintattiche dell'algebra.

Si intravvede qui l'inizio di una evoluzione del pensiero matematico che si manifesterà nei secoli successivi: il fatto che in matematica abbiano una grandissima importanza le convenzioni di rappresentazione grafica, le leggi della scrittura, e lo studio delle loro proprietà; ed il fatto che l'attenzione del matematici si sposti dagli oggetti, dai contenuti, alle procedure che si seguono per ottenere la conoscenza. Inoltre le nuove procedure stimolavano la costruzione di nuovi enti, che si presentavano a prima vista come dei numeri per così dire "strani" e che prendevano via via cittadinanza nel pensiero matematico con la maturazione di questo.

La crisi dell'invenzione di nuovi enti, e la necessità della loro rappresentazione non è nuova: ricordiamo che già la matematica aveva incontrato un problema analogo, quando i Greci avevano posto la questione della rappresentazione dei numeri che noi oggi chiamiamo irrazionali, e che furono denominati anche "alogoi" oppure "arrhetoi", cioè inesprimibili; beninteso come rapporti di interi. Sappiamo anche che i Greci dettero la soluzione di questo problema in forma geometrica [OCCORREREBBE CITARE PLATONE].

Una problematica analoga si è presentata anche alla matematica del Rinascimento, e fu risolta in modo molto moderno da Rafael Bombelli, il quale diede anche le regole di calcolo per i numeri irrazionali, cioè precisò il significato di questi enti attraverso le regole di applicazione.

[1572. L'Algebra, parte maggiore dell'aritmetica]. Vedere

http://mathematica.sns.it/autori/

Il problema della costruzione rigorosa del campo reale si presenterà in seguito, quando si tratterà di costruire il sistema di enti analitici che potessero essere considerati come i corrispondenti del continuo geometrico, reso rigoroso con enunciati linguistici precisi. Come vedremo, questa problematica è strettamente collegata con quella che conduce a dominare i procedimenti infiniti; cosa che del resto già i Greci avevano intuito, ed è il significato profondo del paradosso di Achille e di quello del moto (VEDI SOPRA).

Ma l'invenzione dei metodi dell'algebra poneva anche il problema dell'ampliamento del campo reale, in modo tale che potessero aver sempre senso le operazioni algebriche di soluzione delle equazioni. Sappiamo che primi tentativi per risolvere il problema della costruzione dei numeri complessi si incontrano in Gerolamo Cardano [Ars Magna, 1545]; vedere

http://mathematica.sns.it/autori/

La costruzione stessa viene data, come è noto, in R. Bombelli, sempre in modo molto moderno, cioè con il precisare le regole di calcolo. A questo punto è ragionevole ricordare che l'applicazione dei nuovi metodi convenzionali alla geometria ha mutato le modalità con le quali vengono praticate le procedure di analisi e di sintesi che già la geometria greca aveva codificato (VEDERE SOPRA); infatti in questa nuova situazione la procedura di analisi, cioè di deduzione, viene messa in atto con l'applicazione delle regole di calcolo algebrico, come si è visto. La procedura di sintesi viene realizzata, anche se non nella forma prevista dalla geometria greca, con l'operazione che viene oggi chiamata discussione delle formule risolutive. Quali che siano i nomi che oggi vengono dati a queste procedure, ed i mezzi con i quali esse vengono messe in atto, rimane tuttavia il fatto che lo schema logico è quello che è stato codificato dai Greci.

Non è necessario spendere altre parole per indicare l'importanza di questi metodi per la matematica di oggi; vorremmo soltanto soffermarci ad osservare che, con la geometria analitica, possiamo vedere nascere in forma esplicita una circostanza sulla quale ritorneremo presto; infatti ci piace vedere nella geometria analitica il primo episodio in cui storicamente la matematica si presenta come un insieme di strumenti espressivi e deduttivi, cioè, sotto certi aspetti, come un linguaggio: come vedremo, uno dei linguaggi principali della scienza di oggi.

Tuttavia l'applicazione della matematica alla geometria, che si realizza con i metodi della geometria analitica, è soltanto uno degli aspetti, e forse il primo in ordine di tempo, di una visione molto più generale e profonda della matematica: infatti, a nostro parere, inizia con la geometria analitica la utilizzazione metodica della matematica intesa come linguaggio che permette di rappresentare la realtà, e di dedurre con certezza.

Pensiamo che il celebre passo del Saggiatore di Galileo possa servirci per illustrare il nostro pensiero. Scriveva infatti Galileo: "La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer caratteri ne quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto. "

In altre parole, il grande Pisano dichiara che la Natura, l'universo sono scritti in caratteri matematici. Noi non intendiamo adottare una visione così radicale, che ci porterebbe ad ammettere una struttura quasi pitagorica della realtà materiale; ma ci pare di poter dire che questo passo abbia un profondo carattere metodologico, nel senso che qui la matematica è presentata come lo strumento principale, se non addirittura l'unico, per poter leggere nella realtà fisica; cioè per poterla capire, se adottiamo quella etimologia del termine "intelligenza" che lo fa derivare dal latino "intus legere", leggere dentro, capire e possedere intellettualmente la realtà nei suoi fondamenti e nei suoi principi.

Gli storici del pensiero, ed in particolare del pensiero scientifico, fanno risalire all'epoca rinascimentale la nascita del pensiero scientifico moderno. A nostro parere, questa fioritura meravigliosa, che è in atto ancora oggi, non si deve soltanto all’adozione del metodo sperimentale; noi crediamo piuttosto che essa sia da attribuire alla adozione della matematica come chiave di lettura della realtà, come dice Galileo nel passo citato. Invero, come abbiamo detto, e come Galileo spiega ripetutamente nelle sue opere, la matematica fornisce non soltanto gli strumenti per rappresentare la realtà con precisione ed esattezza, senza ombre o sbavature (con l'operazione di misura), ma fornisce anche gli strumenti per la deduzione certa ed ineccepibile, attraverso il calcolo, cioè attraverso l'applicazione delle regole di sintassi di quello stesso strumento che serve per rappresentare la realtà.

Infatti uno dei momenti essenziali, nella operazione di una qualunque spiegazione razionale della realtà percepita ed osservata, è il passaggio dalle ipotesi che si formulano alle loro conseguenze logiche. Invero le ipotesi non sono oggetto diretto di osservazione, ma la loro attendibilità può essere verificata soltanto attraverso le conseguenze che se ne deducono. L'impiego di uno strumento così potente come la matematica permette di formulare con precisione le ipotesi e di dedurre con certezza le conseguenze; e questo spiega, a nostro parere, il successo della matematizzazione della scienza, successo che dura tuttora, come è confermato dalle affermazioni sempre più importanti della scienza e della tecnica moderne.

10 - Abbiamo sommariamente esaminato il significato e la portata dell'invenzione della geometria analitica, e la conseguente variazione del panorama matematico. Volendo riassumere ciò che abbiamo detto in forma molto approssimata, potremmo dire che la maturazione dell'algebra e dei suoi metodi ha in certo senso capovolto la gerarchia vigente fin dall'epoca classica tra le varie branche della matematica: infatti per la matematica greca la geometria era in certo modo la parte principale della matematica; per esempio, in Euclide troviamo che anche gli enunciati riguardanti i numeri sono espressi in termini geometrici: si dice per esempio che "un numero ne misura un altro" per dire che è suo divisore. La scienza dei numeri, in confronto con la scienza dell'estensione, era considerata come una branca secondaria, ed anche i problemi che noi oggi risolviamo con l'impiego dell'algebra venivano preferibilmente enunciati sotto forma geometrica. Abbiamo anche osservato che le convenzioni per la rappresentazione dei numeri utilizzate dei Greci erano abbastanza scomode, e che forse l'introduzione delle convenzioni arabo-indiane è stata una delle molle che ha fatto scattare l'evoluzione della matematica occidentale.

Con l'invenzione della geometria analitica l'algebra diventava invece in qualche modo la colonna portante della matematica, il metodo universale per la formulazione e per la soluzione dei problemi, il linguaggio col quale i concetti ed i problemi della geometria potevano essere presentati e risolti in generale; la visione di Galileo, secondo la quale la matematica era la lingua nella quale la realtà è scritta , trovava la sua conferma. La geometria veniva così a perdere il suo carattere di capitolo principale della scienza matematica; ma in questo suo scadere di posto e d'importanza stimolava il resto del pensiero matematico con problemi che esso risolverà soltanto in secoli più recenti, nel raggiungere quel progresso che lo porterà alla situazione di oggi.

Anzitutto la geometria ha posto all'algebra il problema della rappresentazione del continuo geometrico, con adeguati simboli linguistici, cioè con convenzioni numeriche. Questo problema è strettamente connesso con l'altro, che consiste nel dominare i procedimenti infiniti, i quali stanno alla base di ogni costruzione del campo reale, cioè alla base di ogni rappresentazione del continuo; rappresentazione che, in epoche precedenti, si accettava come se fosse fornita dalla presunta intuizione geometrica. Ma se si rinuncia ad impiegare la rappresentazione geometrica per gli enti della matematica, occorre costruire un sistema simbolico che abbia la stessa portata e le stesse capacità della pretesa intuizione geometrica, cioè sia capace di rendere, in termini precisi e rigorosi, ciò che la nostra immaginazione costruisce sulla base delle sensazioni, cioè delle informazioni che ci sono fornite di sensi. Questo problema sarà risolto soltanto nel secolo XIX, come vedremo, con la costruzione rigorosa del campo dei numeri reali. Tuttavia occorre ricordare che la problematica geometrica del continuo, e l'ampliamento del dominio di applicazione del metodo matematico, fornì alla scienza l'insieme di questioni dalle quali nacque quella costruzione mirabile che viene chiamata "calcolo infinitesimale".

Non siamo qui a riportare le complicate vicende, e le polemiche che accompagnarono questa costruzione: non è nostra intenzione quella di sciogliere i nodi storici ed attribuire con giustizia ai grandi della matematica i meriti di avere costruito le singole parti di questo imponente edificio scientifico.

(*) (*N. di R.*) Oggi Centro Culturale di Milano:

http://www.centroculturaledimilano.it/

Nota. (Giugno 2013).

Altri sviluppi delle idee contenute nel presente lavoro e la bibliografia relativa si possono trovare in:

(1998) *Dai problemi classici dell'antichità alla geometria analitica*. (Conferenza tenuta presso l'ITIS Leopoldo Nobili di Reggio Emilia il 26 Ottobre 1998, in un corso di aggiornamento in Storia della Matematica).

Moltissimi altri spunti si trovano nei seguenti inediti, e in molti articoli della Bibliografia.

(1978?) *L'evoluzione della matematizzazione della conoscenza*. (Ampliamento dell'intervento tenuto al congresso mondiale di filosofia di Düsseldorf, 1978).

(1991) *Epistemologia della matematica*. Dispense per il ciclo di seminari per il Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica. Università Cattolica. Dipartimento di Matematica. Brescia. Anno Accademico 1991/92.